

## Предисловие редактора перевода

Предмет этой книги — стохастическая финансовая математика. Ее истоки берут свое начало от знаменитой диссертации Башелье (L. Bachelier «Theorie de la speculation» Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17, 1900). Однако интенсивное развитие этой науки началось лишь во второй половине двадцатого века. Наиболее значимые результаты связаны с именами нобелевских лауреатов Г. Марковица, М. Миллера, У. Шарпа, П. Самуэльсона, Р. Мертона и М. Шоулса (его соавтор Ф. Блэк не дожил до присуждения Нобелевской премии).

В России это направление начало развиваться с середины 90-х годов прошлого века в рамках семинаров А. Н. Ширяева в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН и на механико-математическом факультете МГУ. Одним из итогов работы этих семинаров была изданная в 1998 г. двухтомная монография А. Н. Ширяева «Основы стохастической финансовой математики», сразу ставшая, по отзывам специалистов, событием в мировой финансово-математической литературе. Эта монография сыграла важную роль в становлении специальности «Актуарная и финансовая математика» во многих российских университетах.

Предлагаемая вниманию читателя книга написана крупнейшими специалистами по финансовой математике профессором Гансом Фёльмером (Берлинский университет имени Гумбольдта) и профессором Александером Шидом (Берлинский технический университет) и по праву считается одним из лучших западных учебников. Посвященная моделям стохастической финансовой математики с дискретным временем, она в идейном отношении охватывает практически все современные направления этой области. Основной акцент сделан на изложение теории неполных рынков. Это потребовало включить в книгу как классические разделы математической экономики, связанные с теорией предпочтений и моделями Эрроу—Дебре, так и современные достижения по теории монетарных мер риска, многие из которых принадлежат авторам этой книги. Таким образом, материал данной книги для случая дискретного времени существенно дополняет содержание упомянутой выше монографии А. Н. Ширяева.

Книга содержит две части и приложения.

Первая часть, состоящая из четырех глав, посвящена одношаговой модели рынка. В первой главе, посвященной теории арбитража, изучается математическая структура одношаговой модели финансового рынка. Здесь приводятся классические результаты, касающиеся мартингальных критериев отсутствия арбитражных возможностей на финансовых рынках, обсуждается вопрос об эквивалентности свойства полноты рынка и существования единственной мартингальной меры.

Во второй главе излагается теория ожидаемой полезности. Включение этого классического раздела математической экономики в данную книгу обу-

словлено прежде всего проблематикой неполных рынков. На неполном рынке существует риск невыполнения финансовых обязательств, который нельзя элиминировать никакой хеджирующей стратегией. Для определения наилучших стратегий при наличии рисков невыполнения финансовых обязательств нужно исследовать предпочтения инвестора и, в частности, понять, когда эти предпочтения выражаются некоторой функцией полезности.

В третьей главе представлены задачи построения портфеля, максимизирующего ожидаемую полезность результирующей выплаты. Показывается, что существование оптимального решения эквивалентно отсутствию арбитражных возможностей. Приводится равновесный подход к проблеме формирования цен на финансовые обязательства, основанный на теории Эрроу—Дебре.

И, наконец, последняя, четвертая глава первой части посвящена проблеме количественного измерения риска в одношаговой модели. Здесь приводятся системы аксиом, которым удовлетворяют те или иные монетарные меры риска.

Вторая часть книги («Динамическое хеджирование») посвящена изучению многошаговой модели финансового рынка.

В пятой главе устанавливается, что отсутствие арбитражных возможностей характеризуется существованием эквивалентной мартингальной меры. Определяются европейские платежные обязательства и обсуждается проблема формирования их цен, которая тесно связана с задачей хеджирования этих обязательств с помощью динамических портфельных стратегий. В качестве одной из моделей полного рынка рассмотрена биномиальная модель Кокса, Росса и Рубинштейна. Из этой модели, используя один из вариантов центральной предельной теоремы, выводятся знаменитые формулы Блэка—Шоулса для европейских опционов.

Глава 6 посвящена анализу платежных обязательств американского типа, когда покупатель может требовать выплату в любой момент времени до окончания контракта. В случае полного рынка строится теория хеджирования таких платежных обязательств. В рамках теории оптимальной остановки рассматриваются стратегии покупателя, связанные с выбором момента времени исполнения американского опциона. В случае неполных рынков исследуется структура множества безарбитражных цен американских платежных обязательств.

Седьмая глава посвящена построению суперхеджирующих стратегий на неполных рынках для американских и европейских финансовых обязательств. Эти стратегии дают продавцу возможность не проиграть ни при каких обстоятельствах. Однако цена, которую приходится платить за реализацию суперхеджирующей стратегии, как правило, очень высока.

В восьмой главе рассматриваются некоторые альтернативы суперхеджированию путем ослабления указанных выше требований. В частности, в качестве одной из таких альтернатив предлагается стратегия квантильного

хеджирования, позволяющая продавцу не проиграть с высокой вероятностью.

Глава 9 посвящена теории динамического хеджирования в случае, когда можно использовать стратегии только из заданного класса.

И, наконец, в десятой главе представлены еще два подхода к проблеме хеджирования на неполных рынках, в которых не предполагается отсутствие арбитража. Первый подход состоит в выборе стратегии хеджирования, минимизирующей локальный квадратичный риск. Второй подход, названный квадратично-оптимальным хеджированием, состоит в минимизации средне-квадратичной ошибки хеджирования.

Помимо мартингальной техники в данной книге широко используются методы функционального анализа, что выгодно отличает ее от других изданий по финансовой математике. Необходимые сведения из выпуклого анализа, теории меры и некоторых других разделов функционального анализа вынесены в приложения. Это придает изложению материала книги замкнутый характер.

Из краткого обзора содержания книги видно, что она существенно дополняет имеющуюся на русском языке литературу по финансовой математике.

Основная трудность, которую приходилось преодолевать при подготовке перевода данной книги, состояла в том, что большое число финансовых терминов еще не имеет устоявшегося перевода на русский язык. Учитывая это обстоятельство, было признано целесообразным составить на базе книги англо-русский словарь терминов, наиболее часто встречающихся в англоязычной литературе по финансовой математике. По нашему мнению, такой словарь облегчит чтение подобной литературы.

Предлагаемая вниманию российского читателя книга, с одной стороны, рассчитана на то, чтобы служить учебником для студентов и аспирантов специальностей «математика» и «прикладная математика», а также быть использованной при подготовке курсов по современной теории финансов для магистров и аспирантов экономических специальностей. С другой стороны, она является прекрасным введением в стохастические финансы для актуариев, финансовых аналитиков и исследователей, работающих в области математической экономики и желающих войти в круг современных проблем финансовой математики.

Перевод данной книги был подготовлен по издательскому проекту Российского фонда фундаментальных исследований. Как руководитель этого проекта пользуюсь случаем выразить благодарность Э. Л. Пресману за значительный вклад в редактирование окончательного варианта перевода. Переводчики книги Ю. С. Мишура и Г. М. Шевченко проделали кропотливую работу, обнаружив в оригинале ряд неточностей и опечаток. Кроме того, они находились в постоянном контакте с А. Шидом, любезно предоставившим им файлы английского издания и список опечаток.

Москва, апрель 2007

В. И. Аркин

### Предисловие к русскому изданию

Нам было очень приятно и мы восприняли это как большую честь, когда Юлия Мишура и Георгий Шевченко предложили подготовить русский перевод нашей книги. В это время процесс написания второго исправленного и дополненного издания был в самом разгаре, поэтому Юлия Мишура и Георгий Шевченко были вынуждены основывать свой перевод на постоянно меняющейся рукописи. Мы очень признательны им за готовность приспособить свою работу к постоянным изменениям и модификациям. В процессе работы нам была очень полезна их ответная реакция. Мы рады, что благодаря их усердной работе, мы получили возможность довести наши идеи до русскоговорящих коллег.

Русское издание содержит ряд улучшений по сравнению со вторым исправленным и дополненным изданием. В частности, мы благодарны Костасу Кардарасу и Свэну Ликфельду, которые независимо указали, что теорема 9.9 и ее следствия требуют дополнительного предположения. Мы благодарны также Дамиру Филиповичу, Хейнцу Кёнигу, Марейке Массоу и Майку Шойтцоу, которые сообщили нам о необходимости сделать несколько небольших уточнений.

Нам доставляет большое удовольствие поблагодарить наших редакторов Вадима Аркина и Эрнста Пресмана за проделанную ими работу по осуществлению этого проекта. Мы выражаем нашу признательность Московскому центру непрерывного математического образования за публикацию этой книги и Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку. Наконец, мы благодарны издательству «Walter de Gruyter» и нашим издателям Манфреду Карбе и Роберту Плато за их поддержку этого проекта.

Берлин, март 2007

Ганс Фёльмер, Александер Шид

### Предисловие ко второму изданию

Со времени публикации первого издания мы использовали его как основу для нескольких курсов. Среди них семестровый курс финансовой математики в Берлине, а также короткие специальные курсы по мерам риска, данные в Институте Анри Пуанкаре в Париже, на кафедре исследования операций в Корнельском университете, в Academia Sinica в Тайпее, на VIII Симпозиуме по теории вероятностей и случайным процессам в г. Пуэбла (Мексика). За это время мы сделали большое количество мелких исправлений, обнаружили много возможностей для упрощения и прояснения, а также узнали больше о некоторых вещах. В результате основные параграфы книги были улучшены или даже полностью переписаны. К ним относятся параграфы о робастном представлении мер риска, о безарбитражном оценивании платежных обязательств, об экзотических производных ценных бумагах в биномиальной модели, о сходимости к модели Блэка—Шоулса и об устойчивости при

склейке и ее связи с динамически согласованными мерами риска. Кроме того, во втором издании содержатся несколько новых параграфов, включающих систематическое рассмотрение инвариантных по распределению мер риска, вогнутых искажений и раздел о связи мер риска с интегрированием по Шоке.

Мы с удовольствием выражаем благодарность всем студентам и коллегам, чьи комментарии помогли в подготовке этого второго издания, в частности, Дирку Бехереру, Гансу Бюлеру, Штефану Веберу, Вибке Витмюссу, Чинг-Тангу Ву, Розе-Анне Дана, Месропу Джанунтсу, Кристофу Кюну, Марен Лизе, Харальду Лушги, Хольгеру Пинту, Филипу Проттеру, Лотару Рогге, Ульриху Хорсту и Штефану Штурму. Особое спасибо Питеру Банку, а также Юлии Мишуре и Георгию Шевченко, нашим переводчикам на русский язык. И, наконец, мы благодарим Ирен Циммерман и Манфреда Карбе из издательства «Walter de Gruyter» за то, что они убедили нас написать второе издание, и за их действенную поддержку.

Берлин, сентябрь 2004

Ганс Фёльмер, Александер Шид

### **Предисловие к первому изданию**

В этой книге излагаются основные вероятностные методы, применяемые в финансовой математике. Она предназначена студентам-математикам и может быть полезной как математикам-теоретикам, так и тем, кто работает в финансовой инженерии. Мы сосредоточили свое внимание на стохастических моделях с дискретным временем. Такое ограничение имеет два преимущества. Во-первых, вероятностная техника упрощается и мы можем немедленно приступить к обсуждению некоторых ключевых проблем теории формирования цен и хеджирования производных ценных бумаг. Во-вторых, становится ясным, что случай полного финансового рынка, на котором все ценные бумаги допускают точное хеджирование, является скорее исключением, чем правилом. В свете сказанного, модель с дискретным временем — наиболее короткий путь к пониманию современной литературы, посвященной моделям неполного финансового рынка.

Являясь учебником для математиков, эта книга имеет средний уровень сложности с акцентом на мартингальные методы. Поскольку стохастическое исчисление Ито для непрерывного времени здесь не используется, чтение этой книги не требует такой подготовки, как чтение более сложных текстов, к примеру, [73], [74], [82], [129], [188]. С другой стороны, эта книга сложнее учебников типа [160]: мы работаем на общих вероятностных пространствах, а поэтому демонстрируем взаимодействие теории вероятностей и функционального анализа, которое играет решающую роль в некоторых современных аспектах математической теории финансов.

Книга основывается на записях, сделанных авторами при чтении начального курса финансовой математики в Университете Гумбольдта и Берлинском

техническом университете. Этот курс читался для студентов-математиков, изучивших основы теории вероятностей. Нередко параллельно с ним читается курс теории случайных процессов. В противном случае необходимо изложить в самом курсе мартингалные методы для дискретного времени, что и сделано в книге. Обычно следом читается курс финансовой математики для моделей с непрерывным временем. В этом случае весьма полезен тот факт, что студенты уже знакомы с основными идеями финансовой математики.

Центральным местом книги является динамическая теория арбитража, изложенная в первых главах второй части. При чтении курса мы считали полезным вначале объяснить основные понятия на примере более прозрачной одношаговой модели, а затем использовать их в динамической постановке. Таким образом, один из вариантов при чтении книги — начать непосредственно с многошагового подхода, т. е. с главы 5, и по мере необходимости возвращаться к избранным главам первой части. Другая возможность — вначале изучить одношаговую модель и лишь затем вторую часть.

В главе 2 содержится краткое введение в математическую теорию ожидаемой полезности, несмотря на то, что это классическая тема и нет недостатка в прекрасных ее изложениях; с нашей точки зрения, лучшее из них — книга [138]. Мы включили эту главу по трем причинам. Основное внимание в нашей книге уделяется неполным рынкам, а неполнота включает, в той или иной форме, некие предпочтения, определенные в условиях риска и неопределенности. По нашему мнению, математики, работающие в этой области, должны быть хотя бы до некоторой степени знакомы с последовательностью идей, ведущих от Даниила Бернулли, через Джона фон Неймана, Моргенштерна и Сэвиджа, к современным достижениям, мотивированным недостатками классических парадигм. Это первая причина. Вторая состоит в том, что анализ мер риска возник как важнейший вопрос финансовой математики, тесно связанный с робастным вариантом теории Сэвиджа. Третья, но не менее важная, причина — согласно нашему опыту, эта часть курса доставляет наибольшее удовольствие как студентам, так и авторам.

Мы осознаем свой долг перед коллегами и выражаем свою благодарность тем из них, кто способствовал, прямо или косвенно, своими публикациями и неформальными дискуссиями, нашему пониманию предмета, обсуждаемого в книге. Идеи и методы, развитые Дарреллом Даффи, Фредди Делбаеном, Дитером Зондерманном, Юрием Кабановым, Иоаннисом Каратзасом, Дмитрием Крамковым, Дэвидом Крепсом, Стенли Плиской, Крисом Роджерсом, Стивом Россом, Кристофом Стрикером, Дэвидом Хитом, Вальтером Шахермайером, Мартином Швейцером и Николь Эль-Каруи, играют ключевую роль в нашем изложении. Мы обязаны также многим другим, к примеру, учебники [54], [73], [74], [116] и [143] чрезвычайно помогли нам, когда мы начали чтение соответствующего курса.

Выражаем благодарность всем, кто прочел рукопись или некоторые ее части и сделал полезные замечания, в частности, Дирку Бехереру, Штеф-

фену Крюгеру, Ирине Пеннер, Ульриху Хорсту, а также Александру Гизе, сделавшему некоторые из рисунков. Отдельно благодарим Питера Банка за многочисленные конструктивные комментарии. Благодарим также Адама Монахана, Филипа Проттера и Эрхана Цинлара за языковые поправки и факультет исследования операций и финансовой инженерии Принстонского университета за гостеприимство, оказанное нам при завершении рукописи.

Берлин, июнь 2002

Ганс Фёльмер, Александер Шид